[සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2026
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2026
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2026

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $k, \lambda \in \mathbb{R}$ හා $k \neq 0$ යැයි ගනිමු. $kx^2 - 2\lambda x - \frac{1}{k} = 0$ සමීකරණයට නිශ්ශුන්‍ය තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. $\frac{1}{\alpha} + k^2\beta^2$ හා $\frac{1}{\beta} + k^2\alpha^2$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $f(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(x) = x^2 - 2(2\lambda^2 - k\lambda + 1)x + (2k\lambda - k^2 + 1)$ වේ.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි සමමිතික අක්ෂය $x = -1$ බව දී ඇත. $2\lambda^2 - k\lambda + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$2\lambda^2 - k\lambda + 2 = 0$ සමීකරණය λ හි එක් අගයකින් පමණක් තෘප්ත වන පරිදි වූ k හි ධන අගය සොයා, මෙම λ හි අගය ද සොයන්න.

(*b*) $f(x) = x^4 + ax^3 + px^2 + q$ හා $g(x) = x^4 + bx^3 - qx^2 + 2x - p$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

$(x + 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වන බව හා $(x - 1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 4 වන බව දී ඇත.

$a = b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = f(-x)$ සමීකරණයට නිශ්ශුන්‍ය විසඳුමක් ඇති බව ද දී ඇත. $a = 0$ හා $p + q = -1$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(x + 1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) පුනරාවර්තන රහිතව 3, 5, 6, 7 හා 8 යන දී ඇති සංඛ්‍යාංක පහෙන් සමහරක් හෝ සියල්ලම භාවිතයෙන් සංඛ්‍යා සෑදිය යුතුව ඇත.

(i) 10 000 ට වැඩි සංඛ්‍යාවක් සෑදිය හැකි,

(ii) 6000 ට වැඩි සංඛ්‍යාවක් සෑදිය හැකි

වෙනස් ක්‍රම ගණන සොයන්න.

[අවසාන පිටුව බලන්න.

(*b*) (i) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{r+5}{(r+1)(r+2)(r+3)} = \dfrac{A}{r+1} + \dfrac{B}{r+2} + \dfrac{C}{r+3}$ වන පරිදි A, B හා C තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

(ii) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{r+5}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ හා $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{r+2}$ යැයි ගනිමු.

ඉහත (i) කොටස භාවිතයෙන්,

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = 2f(r-1) - 3f(r) + f(r+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=2}^{n+2} U_r + \sum_{r=n+1}^{2n} U_r \right)$ හි අගය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ b & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 5 & c \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{AB} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ වන පරිදි a, b හා c හි අගයන් සොයන්න.

a, b හා c සඳහා මෙම අගයන් ඇතිව, $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, (ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

(iii) $z_2 \neq 0$ සඳහා $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, හා (iv) $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$

බව පෙන්වන්න.

$|z_1| = |z_2| = 1$ හා $z_1 \neq -z_2$ නම්, $\left(\dfrac{1 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right)$ තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ.

$1 + \sqrt{3}i$ හා $\sqrt{2}(1+i)$ යන ඒවා $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $-\pi < \theta \leq \pi$ වේ.

$\omega = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}(1+i)}$ යැයි ගනිමු. $|\omega| = 1$ හා $\operatorname{Arg}\omega = \dfrac{\pi}{12}$ බව පෙන්වන්න.

$\omega^{18} = -i$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ සඳහා $f(x)=\alpha\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2+4$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ. $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{4\alpha(x-1)}{(x+1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$x = 0$ විට $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට වූ ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය 8 බව දී ඇත.

$\alpha = -2$ බව පෙන්වන්න.

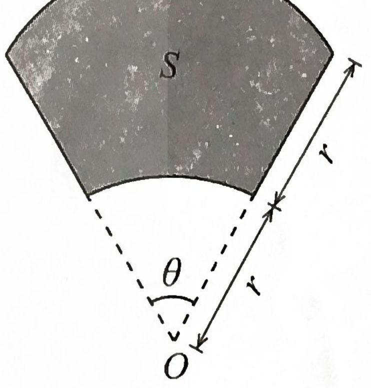
$f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, f හි පරාසය ද, $[k, \infty)$ ප්‍රාන්තරයෙහි f එකට-එක වන පරිදි වූ k හි කුඩාතම අගය ද ප්‍රකාශ කරන්න.

(*b*) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි, අඳුරු කළ S පෙදෙසෙහි මායිම අරයයන් r m හා $2r$ m වූ කේන්ද්‍රය O හි රේඩියන θ කෝණයක් ආපාතනය කරන ඒකකේන්ද්‍රීය වෘත්ත චාප දෙකකින් ද, දික් කළ විට O කේන්ද්‍රය හරහා යන සරල රේඛා ඛණ්ඩ දෙකකින් ද සමන්විත වේ. S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය 81 m^2 බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $r > 0$ සඳහා $p = 2\left(r+\dfrac{81}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා p අවම වන පරිදි r හා θ හි අගයන් සොයන්න.



15. (*a*) $\dfrac{6t^2+7t+3}{(2t-1)(4t^2+4t+5)}$ භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කර **ඒ නයින්,** $\displaystyle\int \dfrac{6t^2+7t+3}{(2t-1)(4t^2+4t+5)}\,dt$ සොයන්න.

(*b*) (i) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{1+\cos x}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = \dfrac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{1+\cos x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, (i) භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4}(\pi-4)+2\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\cot\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\cot x}{1+\cot x}$ බව පෙන්වන්න.

a හා b නියතයන් වන $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cot x)\,dx = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

16. (*a*) $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (0, 2)$ හා l යනු AB රේඛාවට ලම්බ රේඛාවක් යැයි ද ගනිමු. l රේඛාවෙහි සමීකරණය $3x - 2y = \lambda$ ආකාරයෙන් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. l රේඛාව, x-අක්ෂය C ලක්ෂ්‍යයේදී ද, y-අක්ෂය D ලක්ෂ්‍යයේදී ද ඡේදනය කරයි. AD හා BC රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(*b*) $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ යැයි ගනිමු. $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත, සමාන අරයයන්ගෙන් යුතු බව හා ඒවා එකිනෙක ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

තව ද, මෙම වෘත්තවලට පොදු ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න.

$U \equiv 2x - 4y + 3$ යැයි ද ගනිමු. $S_1 + U = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්තවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $S_2 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17. (*a*) $\cos 2x + \sin 2x$ යන්න $R\sin(2x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$ සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

S යනු මෙම විසඳුම්වලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු.

$x \notin S$ සඳහා $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \tan x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$ විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC මත D ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $BD : DC = 2 : 1$ වන පරිදි ය.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා කෝසයින නීතිය යෙදීමෙන්,

සුපුරුදු අංකනයෙන් $AD^2 = \frac{1}{9}\left(6b^2 + 3c^2 - 2a^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm හා $AD = \dfrac{\sqrt{37}}{3}$ cm නම්, $B\hat{A}C = \dfrac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sin\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) + \tan\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \dfrac{3}{2x}$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *